1 Homotopy on Kan complex

Definition 1.1. K を simplicial set としたとき、$x, y \in K_n$ に対し、$x \sim y$ とは、$d_i x = d_i y$ $(0 \leqq i \leqq n)$ かつ、$z \in K_{n+1}$ が存在し、$d_n z = x, d_{n+1} z = y$ であり、$d_i z = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i y$ $(0 \leqq i < n)$ を満たすことと定義する。$z \in K_{n+1}$ を x から y への homotopy と呼ぶ。

Proposition 1.2. K を *Kan complex* としたとき、$\sim$ は K_n $(n \geqq 0)$ における同値関係である。

Proof. $x \in K_n$ に対し、$s_n x \in K_{n+1}$ を考えると、simplicial condition から、

$$d_n s_n x = x = d_{n+1} s_n x$$

また、$d_i s_n x = s_{n-1} d_i x$ であるため、$x \sim x$ となるので反射律は良い。

対称律と推移律は、$x \sim x'$、$x \sim x''$ のとき、$x' \sim x''$ を示せば、同時に示される。face が一致している条件は良い。それぞれの homotopy を $y, z \in K_{n+1}$ とすると、

$$d_n y = x, d_{n+1} y = x', d_i y = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x' \quad (0 \leqq i < n)$$

であり、さらに

$$d_n z = x, d_{n+1} z = x'', d_i z = s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x'' \quad (0 \leqq i < n)$$

である。今、$n+2$ 個の $(n+1)$-simplex

$$d_0 s_n s_n x', \cdots, d_{n-1} s_n s_n x', y, z \in K_{n+1}$$

を考えると、compatibly condition を満たしている。(Λ^{n+2}_{n+2} からの extension を持つ)。K が Kan complex なので、$w \in K_{n+2}$ が存在し、$d_i w = d_i s_n s_n x'$ $(0 \leqq i < n)$、$d_n w = y, d_{n+1} w = z$ を満たす。$d_{n+2} w \in K_{n+1}$ を考えると、

$$d_n d_{n+2} w = d_{n+1} d_n w = d_{n+1} y = x'$$

$$d_{n+1} d_{n+2} w = d_{n+1} d_{n+1} w = d_{n+1} z = x''$$

となり、$0 \leqq i < n$ に対し、

$$d_i d_{n+2} w = d_{n+1} d_i w = d_{n+1} d_i s_n s_n x' = d_{n+1} s_{n-1} s_{n-1} d_i x' = d_{n+1} s_n s_{n-1} d_i x = s_{n-1} d_i x'$$

であるので、$x' \sim x''$ となる。

$\square$

Definition 1.3. K を simplicial set としたとき、$* \in K_0$ に対し、$* : \Delta^0 \longrightarrow K$ と考えられるので、その像を考えれば、任意の $n \geqq 0$ に対し、$* \in K_n$ と考えられる。正確には、$s_{n-1} \cdots s_0(*) \in K_n$ を考えればよい。このとき、$(K, *)_n = \{x \in K_n \mid d_i x = * \ , \ 0 \leqq i \leqq n\}$ という K_n の部分集合を定義する。ただし、$(K, *)_0 = K_0$ である。K を Kan complex としたとき、$(K, *)$ を Kan pair と呼ぶことにする。

$$\pi_n(K, *) := (K, *)_n / \sim$$

で定義する。注意としては $(K, *)$ は simplicial set や Kan complex とは考えていない。あくまで各次元での部分集合である。$\pi_0(K, *)$ を K の path compornent と呼び、これが一点集合の時、K は path connected であると呼ぶ。

Definition 1.4. $n \geqq 1$ としたとき、$[x], [y] \in \pi_n(K, *)$ に対し、次のように積を定める。$n+1$ 個の n-simplicial

$$*, \cdots, *, x, -, y \in (K, *)_n \subset K_n$$

を考えるとこれは、compatibly condition を満たすので、$z \in K_{n+1}$ が存在し、$0 \leqq i \leqq n-2$ において、$d_i z = *$ であり、$d_{n-1} z = x$、$d_{n+1} z = y$ を満たすものが存在する。$d_{n-1} d_n z = d_{n-1} d_{n-1} z = d_{n-1} x = *$、$d_n d_n z = d_n d_{n+1} z = d_n y = *$ であるので、$d_n z \in (K, *)_n$ であり、

$$[x][y] = [d_n z]$$

により定義する。

Lemma 1.5. 上記の積は *well defined* である。

Proof. まず、homotopy の選び方によらないことを示す。$[x], [y] \in \pi_n(K, *)$ に対し、$z_1, z_2 \in K_{n+1}$ を $d_{n-1}(z_j) = x, d_{n+1}(z_j) = y, d_i(z_j) = * \ (0 \geqq i < n-1)$ を満たすものとする。このとき、$d_n z_1 \sim d_n z_2 \in (K, *)_n$ を示す。

$$*, \cdots, s_n d_{n-1} z_1, -, z_1, z_2 \in K_{n+1}$$

は extension condition を満たすので、$w \in K_{n+2}$ で、

$$d_i w = * \ (0 \leqq i < n-1), d_{n-1} w = s_n d_{n-1} z_1, d_{n+1} w = z_1, d_{n+2} w = z_2$$

を満たす。ここで、$d_n w \in K_{n+1}$ を考えると、

$$d_n d_n w = d_n d_{n+1} w = d_n z_1, d_{n+1} d_n w = d_n d_{n+2} w = d_n z_2$$

なので、d_w が $d_n z_1$ と $d_n z_2$ を繋ぐ homotopy である。

続いて代表元のとり方によらないことを示す。$x, y, y' \in (K, *)_n$ に対し、$y \sim y'$ と仮定する。つまり、$w \in K_{n+1}$ が存在し、$d_n w = y', d_{n+1} w = y$ であり、$d_i w = * \ (0 \leqq i < n)$ となる。このとき、$[x][y] = [x][y']$ を示す。$[x][y'] = [d_n z']$ と表す。ただし、$z' \in K_{n+1}$ は $d_{n-1} z' = x, d_{n+1} z' = y', d_i z' = * \ (0 \leqq i < n-1)$ である。$*, \cdots, *, s_{n-1} x, z', -, w \in K_{n+1}$ に対し、extension condition を満たすので、$u \in K_{n+2}$ が存在し、$d_i u = * \ (0 \leqq i < n-1), d_{n-1} u = s_{n-1} x, d_n u = z', d_{n+2} u = w$, を満たす。このとき、$d_{n+1} u \in K_{n+1}$ を考えると、

$$d_{n+1}(d_{n+1} u) = d_{n+1} d_{n+2} u = d_{n+1} w = y$$

そして、

$$d_{n-1}(d_{n+1} u) = d_n d_{n-1} u = d_n s_{n-1} x = x$$

であるため、$[x][y] = [d_n(d_{n+1} u)]$ となるが、

$$d_n(d_{n+1} u) = d_n d_n u = d_n z'$$

なので、$[x][y] = [d_n z'] = [x][y']$ である。 □

Proposition 1.6. $n \geqq 1$ に対し、$\pi_n(K, *)$ は上記の積で群となる。

Proof. 　まず $[*] \in \pi_n(K,*)$ が単位元であることを示す。$[x] \in \pi_n(K,*)$ に対し、$[x][*] = [d_n z]$ である。ただし、$z \in K_{n+1}$ で、$d_i z = *$ かつ、$d_{n-1}z = x$ を満たす。このとき、$s_{n-1}(x)$ もこの条件を満たすので、$[x][*] = [d_n s_{n-1} x] = [x]$。逆も同様である。

逆元の存在については、$[x] \in \pi_n(K,*)$ に対し、$[y][x] = [*]$ となる $[y] \in \pi_n(K,*)$ の存在を示せばよい。$*,\cdots,*,-,*,x \in K_n$ が extension condition を満たすことから、$z \in K_{n+1}$ が存在し、$d_{n+1}z = x, d_n z = *, d_i z = *\ (0 \leqq i < n-1)$ を満たす。よって、$[d_{n-1}z]$ を考えると、$[d_{n-1}z][x] = [d_n z] = [*]$ である。逆に、$[x][d_{n-1}z]$ を考えたとき、$[x][d_{n-1}z] = [d_n w]$ と表す。このとき、

$$*,\cdots,*,z,-,*,w$$

に対し、$u \in K_{n+2}$ が存在し、$d_i u = *$ で、$d_{n-1}u = z$、$d_{n+2}u = w$ を満たす。このとき、$d_n u$ を考えると、$d_i d_n u = *$、

$$d_n d_n u = d_n d_{n+1} u = d_n * = *$$

また、

$$d_{n+1} d_n = d_n d_{n+2} u = d_n w$$

なので、$d_n w \simeq *$。

続いて結合則について確かめる。$[x],[y],[z] \in \pi_n(K,*)$ に対し、extension property をつかうと、$w_{n-1} \in K_{n+1}$ が存在し、

$$d_i w_{n-1} = *\ (0 \leqq i < n-1), d_{n-1}w_{n-1} = x, d_{n+1}w_{n-1} = y$$

を満たし、また、$w_{n+1} \in K_{n+1}$ が存在し、

$$d_i w_{n+1} = *\ (0 \leqq i < n-1), d_{n-1}w_{n+1} = d_n w_{n-1}, d_{n+1}w_{n+1} = z$$

を満たし、また、$w_{n+2} \in K_{n+1}$ が存在し、

$$d_i w_{n+2} = *\ (0 \leqq i < n-1), d_{n-1}w_{n+2} = y, d_{n+1}w_{n+2} = z$$

を満たす。さらに、extention propaty を使えば、$w \in K_{n+2}$ が存在し、

$$d_j w = w_j\ (j = n-1, n+1, n+2), d_j = *\ (0 \leqq j < n-1)$$

を満たす。

$$([x][y])[z] = [d_n w_{n-1}][z] = [d_n w_{n+1}] = [d_n d_{n+1} w] = [d_n d_n w_{n+1}] = [d_{n-1} d_n w_{n+1}][(d_{n+1} d_n w_{n+1})] = [x]([y][z])$$

□

Proposition 1.7. $n \geqq 2$ において、$\pi_n(X,*)$ はアーベル群である。

Proof. この証明にはいくつか準備が必要である。まず、定義からこの群の積構造が、$n-1$ 番目、$n+1$ 番目の座標で n 番目を対応させる雰囲気である。もし、この番号がずれていたらどのようなことが起こるかを見てみる。通常は、$(*,\cdots,*,x_{n-1},x_n,x_{n+1}) \in (X,*)_n^{n+1}$ において、$x \in X_{n+1}$ が $d_j x = x_j$ を満たせば、$[x_{n-1}][x_{n+1}] = [x_n]$ であった。

1. $(*,\cdots,*,x_{n-2},x_{n-1},x_n,*)\in(X,*)^{n+2}_n$ において、$x\in X_{n+1}$ が $d_jx=x_j$ を満たせば、$[x_n][x_{n-2}]=[x_{n-1}]$ である。

   $(*,\cdots,*,-,x_{n-1},x_{n-2})$ において、extension condition より、$y\in X_{n+1}$ が存在し、$0\leqq i\leqq n-2$ に対し、$d_iy=*$, $d_ny=x_{n-1}$, $d_{n+1}y=x_{n-2}$ を満たす。

   $$(*,\cdots,*,s_nx_{n-2},y,-,x,s_{n-2}x_{n-2})$$

   が extension condtion を満たすため、$z\in X_{n+2}$ が存在し、$0\leqq i\leqq n-2$ に対し、$d_iz=*$, $d_{n-2}z=s_nx_{n-2}$, $d_{n-1}z=y$, $d_{n+1}z=x$, $d_{n+2}z=s_{n-2}x_{n-2}$ を満たす。このとき、$d_nz\in X_{n+1}$ を考える。$0\leqq i\leqq n-2$ に対し、$d_id_nz=d_{n-1}d_iz=*$ であり、

   $$d_{n-1}d_nz=d_{n-1}d_{n-1}z=d_{n-1}y$$

   $$d_nd_nz=d_nd_{n+1}z=d_nx=x_n$$

   $$d_{n+1}d_nz=d_nd_{n+2}z=d_ns_{n-2}x_{n-2}=s_{n-2}d_{n-1}x_{n-2}=*$$

   これより、$[d_{n-1}y][*]=[x_n]$ である。つまり、$[x_n]=[d_{n-1}y]$。しかし、$z\in X_{n+1}$ のとり方から、$[d_{n-1}z][x_{n-2}]=[x_{n-1}]$。よって、$[x_n][x_{n-2}]=[x_{n-1}]$。

2. $(*,\cdots,*,x_{n-2},*,x_n,x_{n+1})\in(X,*)^{n+2}_n$ において、$x\in X_{n+1}$ が $d_jx=x_j$ を満たせば、$[x_{n-2}][x_n]=[x_{n+1}]$ である。

   $(*,\cdots,*,x_{n-2},*,-,*)$ において、extension condition より、$y\in X_{n+1}$ が存在し、$i\neq n-2,n$ に対し、$d_iy=*$, $d_{n-2}y=x_{n-2}$ を満たす。

   $$(*,\cdots,*,s_{n-2}x_{n-2},y,x,-,s_nx_{n+1})$$

   が extension condition を満たすため、$z\in X_{n+2}$ が存在し、$0\leqq i\leqq n-3$ $d_iz=*$, $d_{n-2}z=s_{n-2}x_{n-2}$, $d_{n-1}z=y$, $d_nz=x$, $d_{n+2}z=s_nx_{n+1}$ を満たす。このとき、$d_{n+1}z\in X_{n+1}$ を考える。$0\leqq i\leqq n-3$ に対し、$d_id_{n+1}z=d_nd_iz=*$ であり、

   $$d_{n-2}d_{n+1}z=d_nd_{n-2}z=d_ns_{n-2}x_{n-2}=s_{n-2}d_{n-1}x_{n-2}=*$$

   $$d_{n-1}d_{n+1}z=d_nd_{n-1}z=d_ny$$

   $$d_nd_{n+1}z=d_nd_nz=d_nx=x_n$$

   $$d_{n+1}d_{n+1}z=d_{n+1}d_{n+2}z=d_{n+1}s_nx_{n+1}=x_{n+1}$$

   以上のことから、$[d_ny][x_{n+1}]=[x_n]$ であることがわかる。しかし、$y\in X_{n+1}$ のとり方に、1. を適用すると、$[d_ny][x_{n-2}]=[*]$ となる。このことから、$[x_{n-2}]=[d_ny]^{-1}$ となり、

   $$[x_{n-2}][x_n]=[d_ny]^{-1}[d_ny][x_{n+1}]=[x_{n+1}]$$

3. $(*,\cdots,*,x_{n-2},x_{n-1},x_n,x_{n+1})\in(X,*)^{n+2}_n$ において、$x\in X_{n+1}$ が $d_jx=x_j$ を満たせば、$[x_{n-2}]^{-1}[x_{n-1}][x_{n+1}]=[x_n]$ である。

$(*,\cdots,*,-,*,*,x_{n-2})$ において、extension condition より、$y \in X_{n+1}$ が存在し、$i \neq n-2, n+1$ に対し、$d_i y = *$, $d_{n+1} y = x_{n-2}$ を満たす。

$$(*,\cdots,*,d_{n-2}y,*,-,x_{n-1})$$

が extension condition を満たすため、$z \in X_{n+1}$ が存在し、$i \neq n-2, n, n+1$ において、$d_i z = *$, $d_{n-2} z = d_{n-2} y$, $d_{n+1} z = x_{n-1}$ を満たす。さらに、

$$(*,\cdots,*,y,z,s_n x_n,-,x)$$

が extension condition を満たすため、$w \in X_{n+2}$ が存在し、$0 \leqq i \leqq n-3$ に対し、$d_i w = *$, $d_{n-2} w = z$, $d_{n-1} w = d_{n-2} y$, $d_n w = s_n x_n$, $d_{n+2} w = y$ を見たす。このとき、$d_{n+1} w \in X_{n+1}$ を考える。$0 \leqq i \leqq n-3$ に対し、$d_i d_{n+1} w = d_n d_i w = *$ であり、

$$d_{n-2} d_{n+1} w = d_n d_{n-2} w = d_n y = *$$

$$d_{n-1} d_{n+1} w = d_n d_{n-1} w = d_n z$$

$$d_n d_{n+1} w = d_n d_n w = d_n s_n x_n = x_n$$

$$d_{n+1} d_{n+1} w = d_{n+1} d_{n+2} w = d_{n+1} x = x_{n+1}$$

以上のことから、$[d_n z][x_{n+1}] = [x_n]$ であることがわかる。しかし、$z \in X_{n+1}$ のとり方に、2. を適用すると、$[d_{n-2} y][d_n z] = [x_{n-1}]$ となる。さらに、$y \in X_{n+1}$ のとり方に、2. を適用すると、$[d_{n-2} y] = [x_{n-2}]$ となることがわかる。以上より、

$$[x_{n-2}]^{-1}[x_{n-1}][x_{n+1}] = [d_{n-2} y]^{-1}[d_{n-2} y][d_n z][x_{n+1}] = [x_n]$$

4. では準備が整ったので、本題の証明に入る。示すべきは、$n \geqq 2$, $x, y \in \pi_n(X,*)$ に対し、$[x][y] = [y][x]$ である。$n \geqq 2$ という仮定の必要性は上記の議論からすぐにわかる。

$$(*,\cdots,*,x,-,y,*)$$

が extension condition を満たすので、$z \in X_{n+1}$ が存在し、$d_i z = *$, $d_{n-2} z = x$, $d_n z = y$ を見たす。3. により、$[x]^{-1}[d_{n-1} z] = [y]$ となる。つまり、$[d_{n-1} z] = [x][y]$ である。一方、1. により、$[y][x] = [d_{n-1} z]$ でもあるので、題意が示された。

$\square$

Remark 1.8. 上記の議論はすべて、relative version に拡張できる。すなわち、次のような定義、命題がある。

- $(K, L, *)$ が Kan triple とは、K が kan complex, L が K の sub Kan complex, $* \in L_0$ と時を言う。
- $(K, L, *)$: Kan triple、$n \geqq 1$ に対し、

  $$(K,L,*)_n = \{x \in K_n \mid d_0 x \in L_{n-1}, d_i x = *, 1 \leqq i \leqq n\}$$

  という部分集合を考え、$\pi_n(K,L,*) = (K,L,*)_n / \simeq_L$ により定義する。
- $\pi_n(K,L,*)$ は $n \geqq 2$ において群構造を持ち、特に $n \geqq 3$ ではアーベル群となる。

- $\pi_n(K,*,*) = \pi_n(K,*)$ である。

Remark 1.9. $f : (X,*) \longrightarrow (Y,*)$ を基点を保つ *Kan complex* の間の *simplicial map* とする。このとき、

$$f_* : \pi_*(X,*) \longrightarrow \pi_*(X,*)$$

が、$[x] \mapsto [fx]$ により誘導される。これは $n \geqq 1$ において群準同型である。同様に、*Kan triple* の間の *map* $(X,A,*) \longrightarrow (Y,B,*)$ に対しても、

$$f_* : \pi_*(X,A,*) \longrightarrow \pi_*(Y,B,*)$$

が誘導され、$n \geqq 2$ において群準同型である。これより、π_* は基点つき *Kan complex* から、$n = 0$ のときは集合、$n = 1$ のときは群、$n \geqq 2$ のときはアーベル群への *functor* である。あるは、*Kan triple* から、$n = 1$ のときは集合、$n = 2$ のときは群、$n \geqq 3$ のときはアーベル群への *functor* である。

Lemma 1.10. $(K,L,*)$ を *Kan triple* としたとき、$\partial : \pi_n(K,L,*) \longrightarrow \pi_{n-1}(L,*)$ を $\partial[x] = [d_0x]$ により定義すると、これは群準同型である。

Proof. $[x],[y] \in \pi_n(K,L,*)$ に対し、$[x][y] = [d_nz]$ とかく。ただし、$z \in K_{n+1}$ で、$i \neq 0, n-1, n+1$ に対し、$d_iz = *$, $d_0z \in L_n$, $d_{n-1}z = x$, $d_{n+1}z = y$ を満たす。このとき、$0 \leqq i \leqq n-3$ に対し、

$$d_id_0z = d_0d_{i+1}z = *$$

$$d_{n-2}d_0z = d_0d_{n-1}z = d_0x$$

$$d_{n-1}d_0z = d_0d_nz$$

$$d_nd_0z = d_0d_{n+1}z = d_0y$$

これより、

$$\partial([x][y]) = \partial([d_nz]) = [d_0d_nz] = [d_{n-1}d_0z] = [d_0x][d_0y] = \partial[x]\partial[y]$$

□

Theorem 1.11. $(K,L,*)$ を *Kan triple* としたとき、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(L,*) \xrightarrow{i} \pi_n(K,*) \xrightarrow{j} \pi_n(K,L,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(L,*) \longrightarrow \cdots$$

ただし、i,j は *inclusion* $(L,*) \longrightarrow (K,*)$, $(K,*,*) \longrightarrow (K,L,*)$ からの誘導である。

Proof. 一つ一つ確かめればよい。 □

Theorem 1.12. $p : (X,*) \longrightarrow (Y,*)$ を基点を保つ *Kan complex* 間の *Kan fibration* とする。このとき、$p^{-1}(*) = F$ に対し、

$$p_* : \pi_n(X,F,*) \longrightarrow \pi_n(Y,*)$$

は同型である。

Proof. 逆写像 $q : \pi_n(X, F, *) \longrightarrow \pi_n(Y, *)$ を以下のように定義する。$[y] \in \pi_n(Y, *)$ に対し、p が Kan fibration であることから、$x \in (X, *)$ が存在し、$1 \leqq i \leqq n$ に対し、$d_i x = *$, $p(x) = y$ を満たす。このとき、 $pd_0 x = d_0 px = d_0 y = *$ なので、$d_0 x \in (F, *)$ である。これより、$x \in (X, F, *)$ である。$q[y] = [x]$ により定義するとこれは well defined である。なぜなら、$y \simeq y'$ としたとき、その homotopy を $z \in Y_{n+1}$ とおくと、Kan fibration により z も lift され、それが x と x' をつなぐ homotopy となる。このとき、$p_* q = 1$ であることは定義より導かれ、$qp_* = 1$ であることも lift の up to homotopy での一意性による。 □

Corollary 1.13. $p : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ を基点を保つ *Kan complex* の間の *Kan fibration* としたとき、次の完全列が存在する。

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F, *) \xrightarrow{i} \pi_n(X, *) \xrightarrow{p_*} \pi_n(Y, *) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, *) \longrightarrow \cdots$$

Proof. 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(F,*) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \pi_n(X,*) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \pi_n(X,F,*) \arrow[r, "\partial p_*"] \arrow[d, "p_*"'] & \pi_{n-1}(F,*) \arrow[d, "="'] \\
\pi_n(F,*) \arrow[r] & \pi_n(X,*) \arrow[r] & \pi_n(Y,*) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(F,*)
\end{tikzcd}$$

Theorem 1.11 上列が完全列であり、Theorem 1.12 により、縦列の map はすべて同型なので、下列も完全である。 □